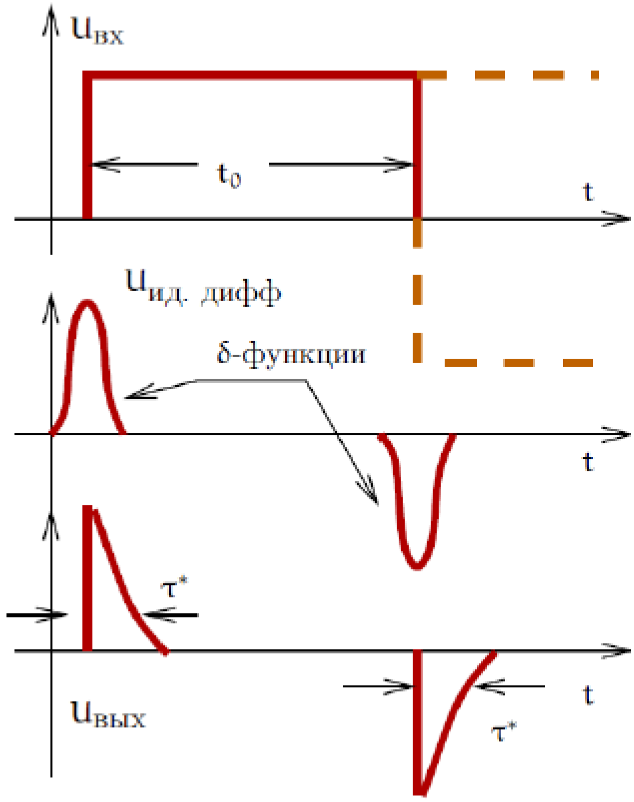
Одна из задач КР1 точно будет посвящена определению того, является ли данная вам цепь дифференцирующей или интегрирующей.

Дифференцирующая цепочка – это быстрореагирующая цепочка, а интегрирующая цепочка – это медленно реагирующая цепочка.
Вот вам картинка для дифференцирующей системы:



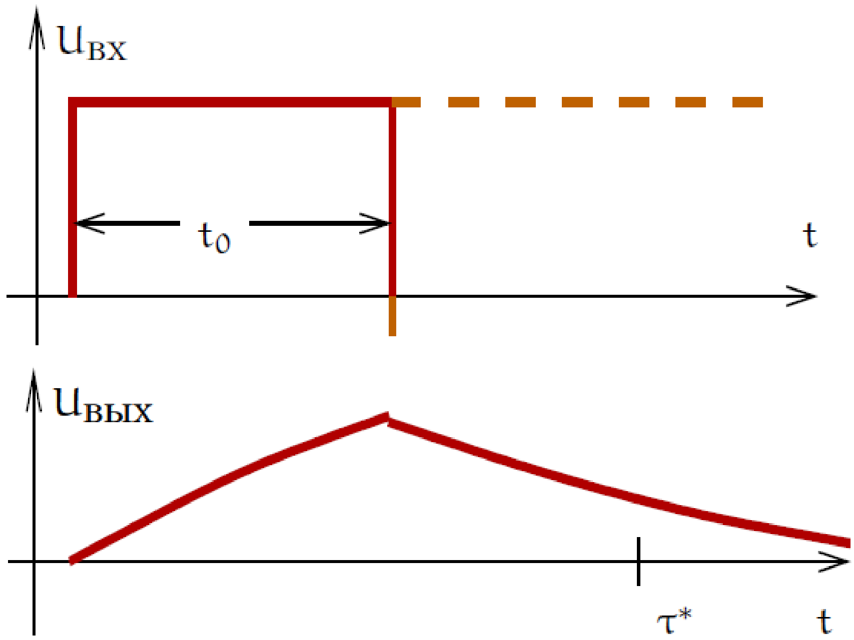
Итак, на вход мы подали напряжение на время t_0. Система реагирует медленно: кратковременный всплеск из-за резкого изменения напряжения на вход, а потом чилл. Ещё один кратковременный всплеск вызван резким изменением напряжения, на этот раз уже на понижение. В идеале это будут дельта-функции, но в реальности будет некоторое время релаксации.
Почему система называется дифференцирующей? Она реагирует на ***изменение*** входого сигнала. Т.е. производная входа сигнала ноль – на выходе ничего нет; производная входного сила не ноль – на выходе ды-дыщ.

Для идеальной дифференцирующей цепочки:

$$U_{\text{вых}}(t) = a\frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}$$

Поэтому она и называется дифференцирующей. К сожалению, собрать такую из R,L,C нельзя, но можно стремиться к этому, собирая неидеальные.

А вот для сравнения интегрирующая система. Она реагирует медленно:



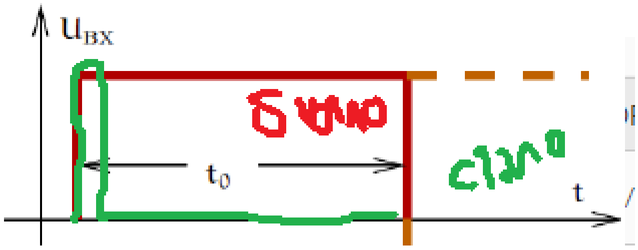
Мы подали мгновенно напряжение, а система реагирует мееееедленнно… изменили напряжение назад – тоже реагирует, уже в сторону уменьшения, но медлеееееннно…

Для идеальной интегрирующей цепочки:

$$U_{\text{вых}}(t) = b\int U_{\text{вх}}(\text{т})d\text{т}$$

Поэтому она и называется интегрирующей. К сожалению, собрать такую из R,L,C нельзя, но можно стремиться к этому, собирая неидеальные.

Говорить о ***приближённой*** дифференцируемости или интегрируемости системы бессмысленно, не зная характерного времени сигнала на входе. Если мы сигнал изначальный сделаем по времени короче

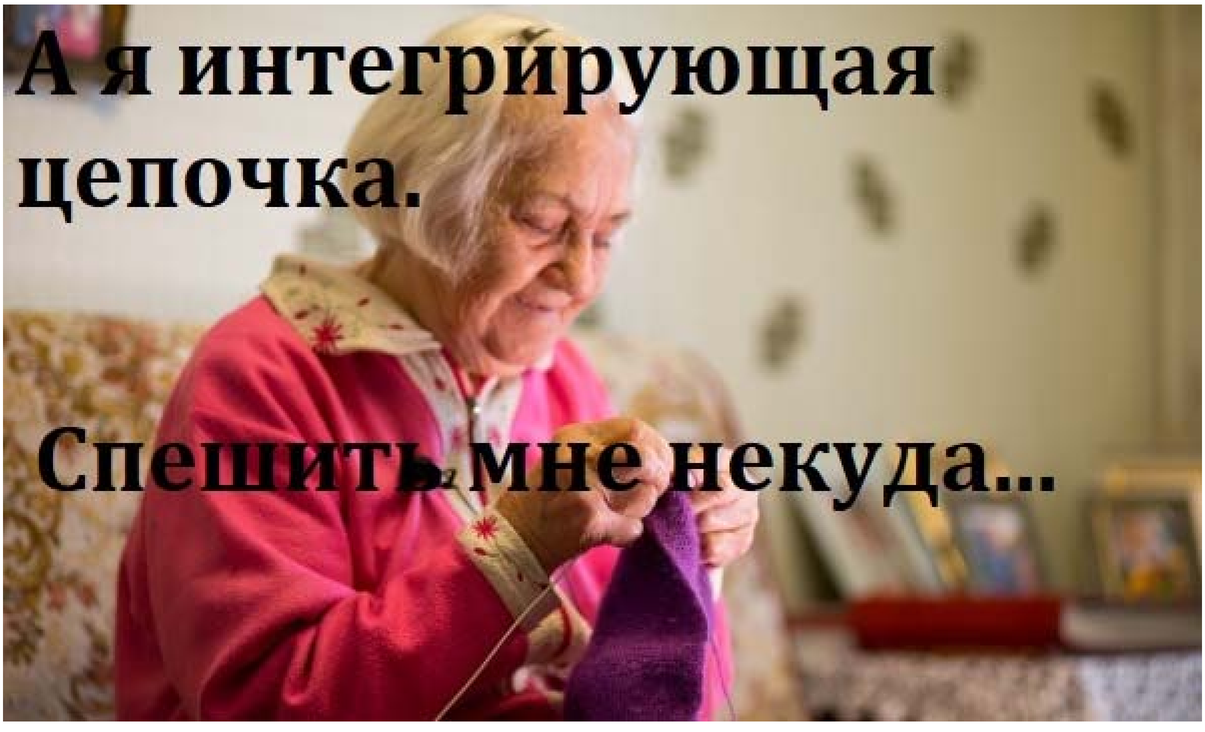


То дифференцируемая система уже будет не успевать быстро реагировать, и на фоне ультракороткого сигнала она уже не будет дифференцируемой. Напротив, если мы сделаем сигнал ультрадлинным, то уже любая система будет интегрируемой, так за очень большое время сигнала она уж точно успеет среагировать.

Как правило, однако, сигналы не единоразовые, как были до этого, а постоянные периодические, с циклической частотой ω. Время сигнала примерно равно периоду T. И ещё у нас есть некое время релаксации системы τ. (Например, для RL и RC цепочек это $\tau_{RL} = \frac{L}{R}, \tau_{RC} = RC$).

Для дифференцирующей цепочки (оперативно реагирующей!!!) время релаксации много меньше периода сигнала: $\tau \ll T$

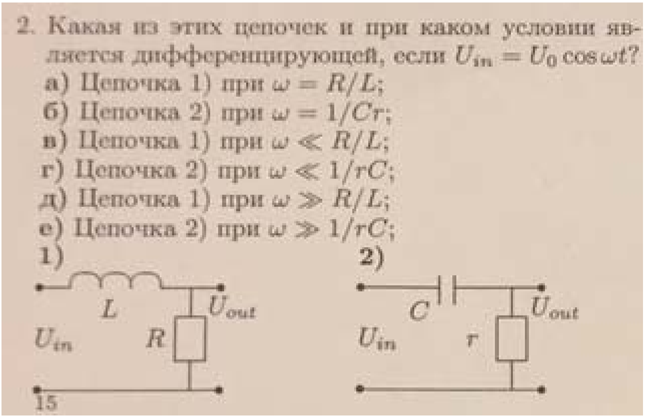
А интегрирующая цепочка – тормоз! У неё время релаксации много больше, чем период сигнала: $\tau \gg T$



Перейдя от периода сигнала T к его частоте, получаем:
Условие дифференцируемости: $\omega\tau \ll 1$

Условие интегрируемости: $\omega\tau \gg 1$

Решим задачу с КР1:


2. Какая из этих цепочек и при каком условии является дифференцирующей, если $U_{in} = U_0 \cos\omega t$?

а) Цепочка 1) при $\omega = R/L$;

б) Цепочка 2) при $\omega = 1/Cr$;

в) Цепочка 1) при $\omega \ll R/L$;

г) Цепочка 2) при $\omega \ll 1/rC$;

д) Цепочка 1) при $\omega \gg R/L$;

е) Цепочка 2) при $\omega \gg 1/rC$;

Считаем время релаксации: первой цепочки $\tau_1 = \frac{L}{R}$, у второй $\tau_2 = rC$.

От нас спрашивают найти дифференцируемую цепочку, поэтому пишем условие дифференцируемости:

$\omega\tau \ll 1$, или же $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

Подставляем τ для каждой цепочки:

Для первой

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\left(\frac{L}{R}\right)} = \frac{R}{L}$$

Это в точности вариант в)!

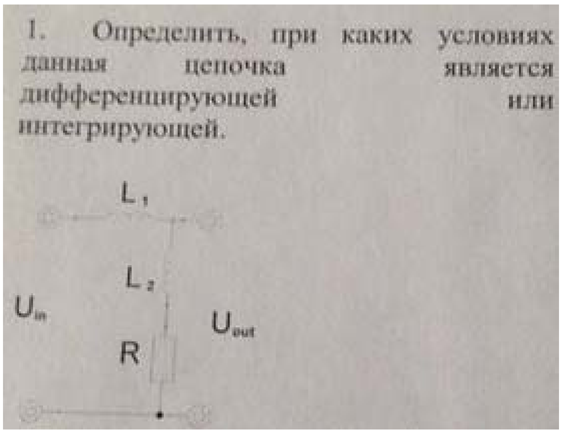
Для второй

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{rC}$$

Это в точности вариант г)!

Ответ: в, г.

Всё совершенно иначе, когда не сказано, что исходный сигнал на одной частоте. В этой задаче с КР1 именно так: он произвольный:



Рассмотрим сначала случай дифференцируемости.

Условие $\omega\tau \ll 1$ по-прежнему действует. Время релаксации будет

$$\tau = \frac{L_1 + L_2}{R}$$

(используем готовую формулу для RL-контура $\tau_{RL} = \frac{L}{R}$, а т.к. ёмкости подключены последовательно, они складываются).

Поэтому первое условие

$$\omega \frac{L_1 + L_2}{R} \ll 1$$

Т.к. частоты у нас разные, оно утверждает: чем для большего числа частот будет это верно, тем лучше цепочка будет дифференцировать.

Но этого недостаточно! Можно вывести (и Вятчанин это выводит), что дифференцирующих цепочек, ***если сигнал подаётся на разных частотах,*** то для дифференцируемости следует потребовать

$$K(\omega) \sim \omega$$

А $K(\omega)$ у нас

$$K(\omega) = \frac{i\omega L_2 + R}{i\omega L_1 + i\omega L_2 + R}$$

Как бы нам сделать так, чтобы это было $\sim\omega$? Идея: в числителе надо убрать R , оставив $i\omega L_2$, а знаменатель опостоянить, убрав $i\omega L_1 + i\omega L_2$ и оставив R:

$$K(\omega) = \frac{i\omega L_2 + \cancel{R}}{\cancel{i\omega L_1 + i\omega L_2} + R} = \frac{i\omega L_2}{R} \sim \omega$$

Для этого нужно, чтобы $\omega L_2 \gg R$ и $R \gg \omega L_1 + \omega L_2$. Заметим, что второе неравенство – это и есть того, что мы получали из $\omega\tau \ll 1$. Поэтому (говорю я вам на будущее), впредь $\omega\tau \ll 1$ можете не писать, а писать сразу более сильное условие $K(\omega) \sim \omega$.

Первая половина ответа: для дифференцируемости $\omega L_2 \gg R$ и $R \gg \omega L_1 + \omega L_2$. А, стоп – эти условия же противоречат друг другу! Тогда ответ: ни при каких ω цепочка не является дифференцируемой.

Теперь про интегрируемость. Там уже требуется не $\omega\tau \gg 1$, а более сильное условие, которое включает в себя $\omega\tau \gg 1$:

$$K(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$$

Как этого добиться? Смотрим на дробь:

$$K(\omega) = \frac{i\omega L_2 + R}{i\omega L_1 + i\omega L_2 + R}$$

На этот раз надо сделать так:

$$K(\omega) = \frac{\cancel{i\omega L_2} + R}{i\omega L_1 + i\omega L_2 + \cancel{R}} \sim \frac{1}{\omega}$$

А для этого нужно $\omega L_2 \ll R$ и $R \ll \omega L_1 + \omega L_2$. Эти условия уже не противоречат друг другу: достаточно потребовать очень маленькую L_2 и очень большую L_1: $L_2 \ll \frac{\omega}{R} \ll L_1$.

Вторая половина ответа: для интегрируемости $\omega L_2 \ll R$ и $R \ll \omega L_1 + \omega L_2$.

Замечание. Смотря решения других, вы можете встретить запись:
Для дифференцирующей: $K(\omega) \sim \omega\tau$
Для интегрирующей: $K(\omega) \sim \frac{1}{\omega\tau}$
Так вот, т.к. τ не зависит от ω, проще писать, как я:
Для дифференцирующей: $K(\omega) \sim \omega$
Для интегрирующей: $K(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$
А время релаксации считать и вовсе необязательно.